

2022 年“南威杯”

福州大学数学建模竞赛

题目 基于多目标规划模型的交通枢纽最优布局分析

摘 要：

随着城市经济的不断发展，城际交通运输的需求不断扩大，高铁综合交通枢纽作为一个集结联系多种交通运输方式的纽带，能够鲜明地反映一个城市的交通系统运行效率与服务品质，随之产生了交通枢纽的布局建设等问题。

本文重点讨论了在尽可能节约交通枢纽建设成本，并缩短乘客换乘距离的条件下，某城市高铁站综合交通枢纽的建设层数以及各交通功能区的布局问题。

针对交通枢纽的建设与具体布局问题，我们采用了建立三维坐标模型的方法，通过表示每个交通功能区的目标点坐标（中心点、边界点），来体现该交通功能区在交通枢纽三维模型中的具体位置，从而能够使用数学语言表示建设成本、换乘距离的计算方式。

针对尽可能减少换乘距离，我们建立了混合整数非线性规划模型，实现对最优交通枢纽空间布局的求解；在此基础上，针对尽可能减少建设成本，我们建立了整数规划模型，实现基于最小建设成本的最优交通枢纽空间布局的求解。

在此基础上，为了尽可能节约交通枢纽的建设成本，同时又尽可能缩短乘客换乘距离，我们采用了多目标规划的方法，将计算建设成本、换乘距离的模型转化为多目标规划模型的两个目标函数，然后对其进行加权处理，进而将多目标问题转换为赋予相应权重的单目标问题进行分析。最后我们采用蒙特卡罗模拟进行计算仿真，逼近建设成本和距离系数的最优组合，求解得出最优组合情况下的交通枢纽布局方案。

关键词：多目标规划 混合整数非线性规划 蒙特卡罗模拟 三维空间 交通枢纽布局

一、问题重述

1.1 问题背景

城市交通枢纽是集结多种交通运输方式（高铁、轻轨、出租车、公交、步行）的场所，是反映交通系统运行效率和服务品质的关键载体^[1]。它不仅具备客流转换和集结大量客流的功能，而且配备有各种运营调度、组织管理以及为乘客提供服务的多用途、多功能的综合建筑。

实践表明，城市交通换乘枢纽布局与衔接的好坏对城市客运运营水平和城市道路交通环境都有很大的影响，所以优化城市客运换乘枢纽的衔接布局，提高其服务效率是当前交通工作者们的一项艰巨任务^[2-3]。

某城市将在高铁站建造连接五种交通方式（高铁、轻轨、出租车、公交、步行）的高铁综合交通枢纽，现已知枢纽内各层可利用平面面积为 15000 平方米，其中长度 150 米，宽度 100 米，且各层之间的垂直距离约 15 米。不同交通的换乘在同层布局时，不同交通功能区不能重合，且各个交通区可以简化为矩形。现给出各交通方式间的换乘量信息表、各交通功能区需求面积及尺寸表、同种交通功能区场站布局于不同层位时工程造价表（详见赛题 A 题中表 1-3）。

1.2 问题描述

为了尽可能节约交通枢纽建设成本，并缩短乘客换乘距离的条件，请你为建设公司提供交通枢纽的建设布局方案，需解决以下问题：

- ① 枢纽应该建设为几层，各交通功能区建设在第几层的何处位置？

二、问题分析

2.1 问题分析

问题要求在尽可能节约交通枢纽建设成本，并缩短乘客换乘距离的条件下，枢纽应该建几层，各交通功能区建设在第几层的何处位置？

针对交通枢纽的建设与具体布局问题，我们采用了建立三维坐标模型的方法^[4-6]，通过计算每个交通功能区的目标点坐标（中心点、边界点），来表示该交通功能区在交通枢纽三维模型中的具体位置，从而能够使用数学语言表示建设成本、换乘距离的计算方式。

针对尽可能节约交通枢纽建设成本，并缩短乘客换乘距离的限制条件，我们采用了多目标规划的方法^[7-8]，将计算建设成本、换乘距离的函数转化为多目标模型的目标函数，通过对其进行加权处理，将多目标问题转换为单目标问题进行分析。

我们通过找到各个交通功能区的三维坐标点位之间的相互关系，来转化成多目标模型中的约束条件。其中，我们将点位之间的相互关系分为两种情况：第一种，是将两两中心点的距离关系视作两块交通功能区之间的平均换乘距离；第二种，是规定任意相邻的两块交通功能区的边界点彼此之间必然重叠（要么是点与点之间重叠，要么是点与线之间重叠）。在得到目标函数与限制条件后，我们通过使用蒙特卡罗模拟^[9]来进行计算仿真，来逼近建设成本、换乘距离的最优组合。

三、符号说明与模型假设

3.1 符号说明

符号	具体说明
S	评价指标: 计算对建设成本系数、换乘距离系数两个目标函数进行标准化消除量纲影响, 并进行加权处理后得出的评价指标
$P_{(x,y,z)}^{i,j}$	换乘距离系数: 不同交通功能区之间的换乘距离与对应交通功能区场站之间的换乘量权重的乘积的累和再求其一半
$U^{i,j}$	交通功能区场站之间的换乘量的权重: 不同交通功能区换乘量除以各换乘量的累和值
$D_{(x,y,z)}^{i,j}$	不同交通功能区场站之间的三维换乘距离
$W_{(x,y,z)}^i$	建设成本系数: 不同的交通功能区场站的建设需求面积与对应各交通功能区场站在不同层位的建设成本的乘积的累和
$A_{(x,y,z)}^i$	交通功能区场站的建设需求面积
$B_{z_k}^i$	各交通功能区场站在不同层位的建设成本
i	$i = 1, 2 \dots 5$ 分别指代不同交通功能区 ($i = 1$ 代表步行广场, $i = 2$ 代表高铁场站, 以此类推...)
j	$j = 1, 2 \dots 5$ 分别指代不同交通功能区 ($j = 1$ 代表步行广场, $j = 2$ 代表高铁场站, 以此类推...)
x	目标点对应的横坐标
y	目标点对应的纵坐标
z	目标点对应的竖坐标
z_k	指代不同交通区所在的层数 $z_k = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$
α_i, α_j	不同交通功能区的长度
β_i, β_j	不同交通功能区的宽度

3.2 模型假设

- (1) 假设乘客平均分布在每一块交通功能区上;
- (2) 假设每位乘客在两两对应的交通功能区之间的换乘距离是相等的 (比如: 每一位从高铁场站换乘到轻轨场站的乘客, 所需要的换乘距离相等);
- (3) 假设不考虑交通工具的延误、乘客取消行程等影响交通方式换乘量的因素。

四、模型的建立与求解

4.1 本题模型的建立与求解

4.1.1 三维坐标模型的建立

如图 1-2 所示，为了将交通枢纽的建设与具体布局问题转化为数学问题，我们采用了建立三维坐标模型的方法，通过计算每个交通功能区($i = 1, 2 \dots 5$)的目标点坐标(x_i, y_i, z_i)，来表示该交通功能区在交通枢纽三维模型中的具体位置，从而能够使用数学语言表示建设成本系数、换乘距离系数的计算方式。

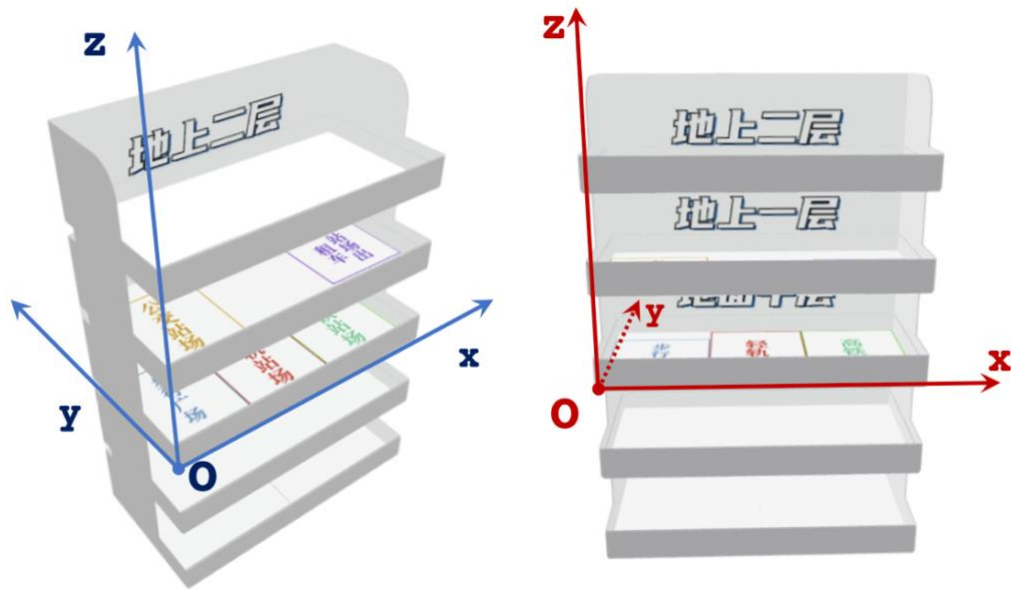


图 1 三维坐标模型的建模示意图

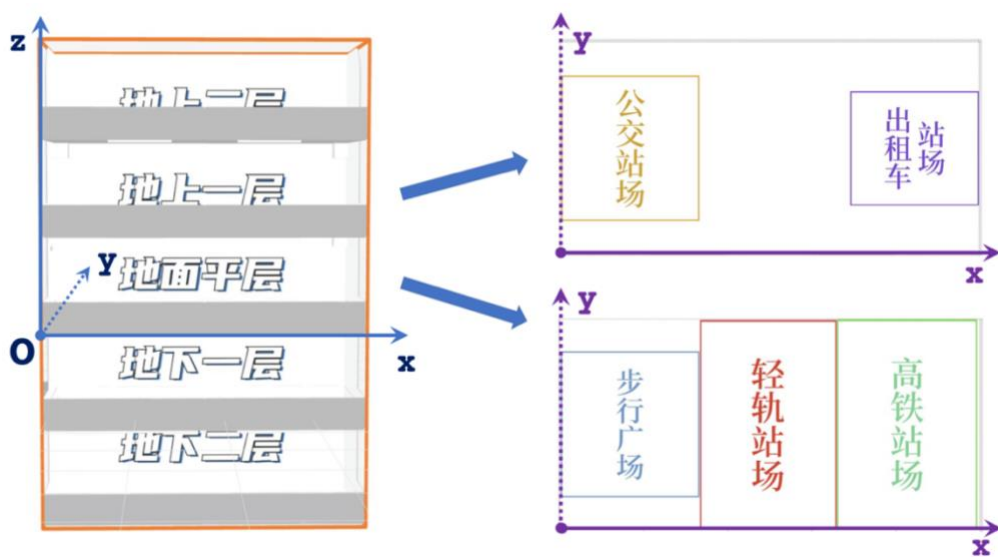


图 2 三维坐标模型转二维坐标模型示意图

如图 3 所示，我们通过找到各个交通功能区的三维坐标点位之间的相互关系，来转化成多目标模型中的约束条件。其中，我们将目标点坐标（中心点、边界点）之间的相互关系分为两种情况：第一种，是将两两中心点的距离关系视作两块交通功能区之间的三维换乘距离（见图中红色箭头部分）；第二种，是规定任意相邻的两块交通功能区的边界点彼此之间必然重叠（要么是点与点之间重叠，要么是点与线之间重叠，见图中黑色线段部分）。

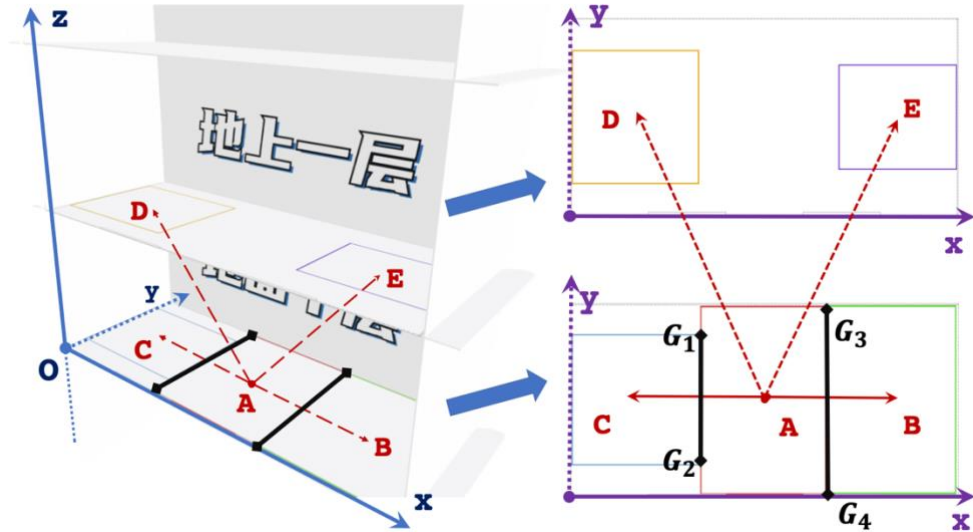


图 3 三维坐标点位之间的相互关系示意图

通过建立三维坐标模型，可以表示出两种目标点的相互关系的数学表达式：

$$D_{[x,y,z]}^{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (1.)$$

$$s. t. \begin{cases} 40 \leq x_i \leq 110 \\ 25 \leq x_4 \leq 125 \\ 40 \leq y_1 \leq 60 \\ y_2 = 50 \\ 40 \leq y_3 \leq 60 \\ 25 \leq y_4 \leq 75 \\ y_5 = 50 \\ i = 1, 2, 3, 5 \end{cases} \quad (2.)$$

$$s. t. \begin{cases} 50 \leq |x_i - x_j| \leq 100 \\ 0 \leq |y_i - y_j| \leq 50 \\ x_i \pm \frac{\alpha_i}{2} = x_j \pm \frac{\alpha_j}{2} \text{ 或 } y_i \pm \frac{\beta_i}{2} = y_j \pm \frac{\beta_j}{2} \\ i, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 0 \leq |x_i - x_j| \leq 50 \\ |y_i - y_j| = 50 \\ x_i \pm \frac{\alpha_i}{2} = x_j \pm \frac{\alpha_j}{2} \text{ 或 } y_i \pm \frac{\beta_i}{2} = y_j \pm \frac{\beta_j}{2} \\ i, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad (3.)$$

其中(1)式表示两交通功能区之间的三维换乘距离，(2-3)式表示换乘距离公式的约束条件，即(2-3)式用于约束(1)式，其中(3)式两者满足其一即可成立。

表示出不同交通功能区场站之间的三维换乘距离后，我们可以通过计算两两交通功能区场站之间的三维换乘距离与其对应的换乘量权重乘积的累和，然后除以 2 即可得到换乘距离系数的目标函数（如式-4 所示）。再通过计算每一交通功能区的建设需求面积与对应建设成本乘积的累和，即可得到建设成本系数的目标函数（如式-5 所示）。

其中，经过文献、数据库查阅和大量的预计算^[10]，我们发现如果考虑将任一交通功能区建设在地下 1-3 层，都会造成建设成本的显著增加，并且对于换乘距离的优化微乎其微，因此我们剔除了利用地下 1-3 层的情况，即不同交通区所在的层数 $z_k = 0,1,2,3$ 。综上所述，得到将建设成本系数与换乘距离系数的目标函数，分别表示为：

$$\min P_{(x,y,z)}^{i,j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^5 U^{i,j} D_{(x,y,z)}^{i,j} \quad (4.)$$

$$\min W_{(x,y,z)}^i = \sum_{i=1}^5 A_{(x,y,z)}^i B_{z_k}^i \quad (5.)$$

其中， $D_{(x,y,z)}^{i,j}$ 表示三维换乘距离， $U^{i,j}$ 表示两交通功能区之间的换乘量权重。 $A_{(x,y,z)}^i$ 表示交通功能区场站需求面积， $B_{z_k}^i$ 表示各交通功能区场站在不同层位的建设成本。

4.1.2 多目标规划模型的建立

多目标规划模型（MOP）可用于研究分析多于一个目标函数在给定区域上的最优化问题，对于本问题而言，我们需要尽可能地降低交通枢纽建设成本，同时又需要尽可能地缩短乘客换乘距离。为了计算出建设成本、换乘距离的最优组合，我们可以使用多目标规划模型来进行分析。

首先，通过查阅交通枢纽建设布局的相关文献^[11]，我们为建设成本系数、换乘距离系数这两个目标函数分别设置了权重因子 (k_1, k_2) ，其中 $k_1 = 0.62$ ， $k_2 = 0.38$ ，从而通过加权处理将其转化为单目标问题。

此外，我们注意到建设成本系数、换乘距离系数这两个目标函数的量纲不同，前者为“元（RMB）”，后者为“米（M）”。因此我们需要首先对目标函数进行标准化来消除量纲的影响，然后再进行加权处理。由于题目中并没有给出建设成本与换乘距离的参考值，我们通过查阅交通枢纽建设布局的相关文献与数据库^[12-14]，获取并加权处理了 20 组标准化参考值，得到 1 组目标参考值 (∂_1, ∂_2) ，最终通过将目标函数分别除以其目标参考值来消除量纲影响，最终得到加权组合后目标函数：

$$S = k_1 \cdot \frac{P_{(x,y,z)}^{i,j}}{\partial_1} + k_2 \cdot \frac{W_{(x,y,z)}^i}{\partial_2} \quad (6.)$$

其中， S 表示对建设成本系数、换乘距离系数两个目标函数进行标准化消除量纲影响、并进行加权处理后得出的评价指标，当 S 达到最小值时对应的 5 个交通功能区所在的位置，即为本题模型所求，交通枢纽布局的最优组合。

4.1.3 蒙特卡罗模拟的引入

蒙特卡罗模拟的本质是大数定理的思想：当样本容量足够大时，事件的发生频率即为其概率。我们分析发现，本题中混合整数非线性的目标函数，无法使用 MATLAB 现有自带的工具箱实现计算，而蒙特卡罗模拟可以用于计算目标函数的最优解。

我们通过使用蒙特卡罗模拟的方法，通过生成给定范围内的大量随机数，然后使用 for 循环在给定的约束条件下进行了 1000000 次模拟计算，通过不断比较约束条件下的计算得出的建设成本、换乘距离，进而找到了目标函数 S 的最优解。

4.1.4 本题模型的求解

通过建立三维坐标模型与混合整数非线性的多目标规划模型，我们首先表示出了模型最终的目标函数，进而使用蒙特卡罗模拟来进行模拟计算，最终得到了基于权重因子 $k_1 = 0.62$, $k_2 = 0.38$ 时的一组较优解集：

表 1-权重因子 $k_1 = 0.62$, $k_2 = 0.38$ 时的一组较优解集

序号	$P_{(x,y,z)}^{i,j}$	$W_{(x,y,z)}^i$	S
01	806.21	3420	1.23677612
02	919.18	3320	1.34310949
03	804.43	3420	1.23491851
04	477.08	3220	0.87017291
05	477.64	3260	0.87538208
06	467.55	3320	0.87178932
07	805.05	3240	1.21475413
08	472.52	3260	0.87003886
09	468.14	3320	0.87240504
10	477.35	3220	0.87045468
11	476.90	3220	0.86998506
12	477.13	3220	0.87022509

如表 1 所示，在权重因子 $k_1 = 0.62$, $k_2 = 0.38$ 时，我们可以得到一组最优解集（图中序号第 11 组数据），在这个数据情况下可以同时满足建设成本系数与换乘距离系数的最优情况。该组数据对应的 5 个交通功能区的中心点坐标如下：

$$\begin{aligned}
 & \text{步行广场: } (25,50,0) \\
 & \text{高铁场站: } (125,50,0) \\
 & \text{公交场站: } (25,50,15) \\
 & \text{出租车场站: } (125,50,15) \\
 & \text{轻轨场站: } (75,50,0)
 \end{aligned} \tag{7.}$$

综上所述，为了尽可能地节约建设成本，同时尽可能地缩短乘客的换乘距离，该城市应该对高铁站综合交通枢纽采用下述布局方案（具体位置如图 4 所示）：

1. 高铁站综合交通枢纽应建设为两层：地面平层、地上 1 层；
2. 步行广场设置在地面平层的最左侧居中位置，其中心点坐标为(25,50,0)
3. 轻轨场站设置在地面平层的中间位置，其中心点坐标为(75,50,0)
4. 高铁场站设置在地面平层的最右侧位置，其中心点坐标为(125,50,0)
5. 公交场站设置在天上 1 层的最左侧居中位置，其中心点坐标为(25,50,15)
6. 出租车场站设置在天上 1 层的最右侧居中位置，其中心点坐标为(125,50,15)

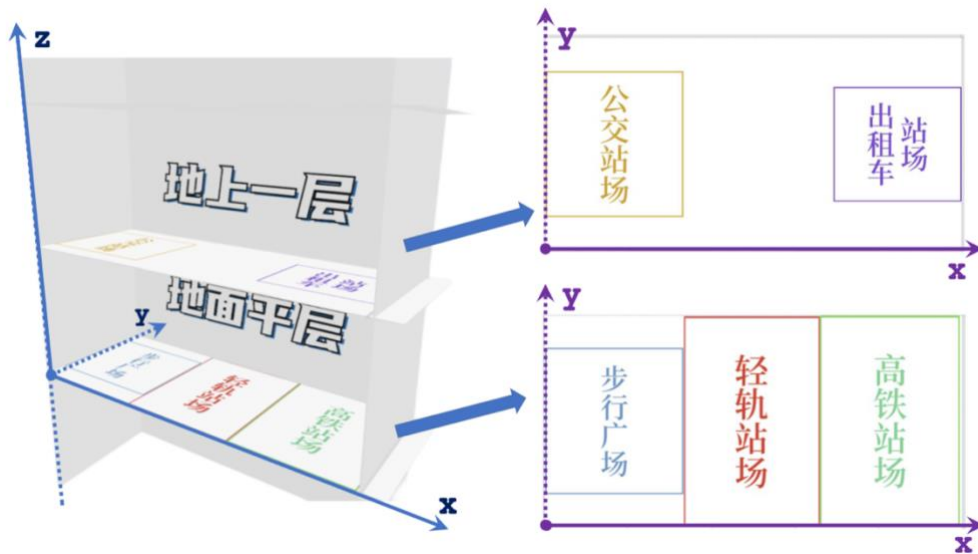


图 4 基于权重因子 $k_1 = 0.62$, $k_2 = 0.38$ 时最优解集的三维坐标模型示意图

4.2 本题模型的灵敏度分析

通过多目标规划模型得到最优结果后，我们对结果进行敏感度分析。敏感度分析是指从定量分析的角度研究有关因素发生某种变化对某一个或一组关键指标影响程度的一种不确定分析技术。其实质是通过逐一改变相关变量数值的方法来解释关键指标受这些因素变动影响大小的规律。经过计算，对于本题模型的分析如下（计算分析所产生的较优解集，详见附录表 2-3）：

我们通过改变换乘距离系数 $P_{(x,y,z)}^{i,j}$ 和建设成本系数 $W_{(x,y,z)}^i$ 的权重，来观察对模型最优解的影响（由于两个权重和为 1，因此我们只需要改变 $P_{(x,y,z)}^{i,j}$ 的权重即可），我们发现 $P_{(x,y,z)}^{i,j}$ 的权重的转折点在 $0.554 \sim 0.555$ 之间，在 $P_{(x,y,z)}^{i,j}$ 的权重大于这个转折点的条件下，目标函数更倾向于得到 $P_{(x,y,z)}^{i,j}$ 更小的目标点解集；而在 $P_{(x,y,z)}^{i,j}$ 的权重小于这个转折点的条件下，目标函数更倾向于得到 $W_{(x,y,z)}^i$ 的更小的目标点解集。

五、模型的优缺点与改进

5.1 本题模型的优点

- ① 多目标规划模型的优点：
 - A. 根据交通枢纽建设成本及换乘距离的限制条件建立多目标模型的目标函数，通过对其进行加权处理，求解得出了此问题的一组较优解集；
 - B. 实际建设中可以根据对各因素考虑优先级，赋予目标函数相应的权重，从较优解集中选出适合的最佳权衡解。
- ② 蒙特卡罗模拟的优点：
 - A. 通过蒙特卡罗模拟产生大量路径模拟情形进行计算比较，当样本容量足够大时，事件的发生频率即为其概率；我们分析发现，本题中混合整数非线性的目标函数，无法使用 MATLAB 现有自带的工具箱实现计算，而蒙特卡罗模拟可以用于计算目标函数的最优解。
- ③ 三维坐标模型的优点：
 - A. 通过建立三维坐标模型，将实际空间布局问题转化为三维坐标系中具体点的坐标，找到各个交通功能区的三维坐标点位之间的相互关系；
 - B. 将交通功能区的平均换乘距离和面积用相应的坐标和距离公式进行表达，有助于将数据利用蒙特卡罗模拟进行计算仿真，来逼近最优组合。

5.2 本题模型的缺点

- ① 多目标规划模型的缺点：
 - A. 两个不同性质的目标函数数量纲不同，运用参考值进行标准化处理来消除量纲的影响，此处参考值是根据查找大量资料综合得出的数据，具有一定的偏差性^[15-16]；
 - B. 对两个目标函数的权值分配有一定的主观性。
- ② 蒙特卡洛算法的缺点：
 - A. 算法需要较多的计算步数；
 - B. 对于确定性问题需要转化成随机性问题^[17]。

5.3 本题模型的改进方法

对于建立本题模型中的所使用的多目标规划模型而言：由于两个目标函数的权值分配具有较强的主观性，我们可以使用敏感度分析，找到其各自权重对目标函数的影响程度，找到能够取得最优解的权重值。从而优化更新权重值，找到最优解。

对于求解本题模型中的所使用的蒙特卡罗模拟而言：由于其思想是通过产生随机数来进行大量的实验仿真模拟求得近似最优解，而对于这个过程需要 MATLAB 进行大量的判断与循环操作，而当模拟的次数非常大的时候，这段程序的运行时间会变得很长，那么对于代码部分我们可以采取更优的写法来减省程序运算的开支，从而减少程序运行的时间。

六、参考文献

- [1] 邓晓庆.城市中心区综合交通枢纽空间布局和交通组织——以深圳市西丽高铁站为例.城市交通.11-5141.1-15.2022.
- [2] 商晓婷.多层次多模式交通枢纽选址优化方法及应用[D].北京交通大学.DOI:10.26944/d.cnki.gbfju.2021.000358.2021
- [3] 姜彩良.城市客运交通换乘衔接研究及对策分析[D].长安大学.2004
- [4] 傅水龙.交通规划设计施工三维可视化与分析平台设计[J].中国交通信息化.130-133.2019
- [5] 王鸿,田永明,邵飞.城市交通三维数据建设与应用[J].城市勘测.56-57.,2015.
- [6] 王怀松,陈荣武.轨道交通三维视景模型的建模与控制[J].铁路计算机应用.57-60.2017
- [7] 吴小萍、詹振炎. 交通建设项目多目标决策系统 ELECTRE 优选模型及其应用研究.中国公路学报.14.1.1-5.2001.
- [8] 赖红松,董品杰,祝国瑞. 求解多目标规划问题的 Pareto 多目标遗传算法.《系统工程》.21.5. 1-5.2003.
- [9] 何凤霞,张翠莲. 蒙特卡罗方法的应用及算例.华北电力大学学报:自然科学版 32.3: 110-112.2005
- [10]袁虹,陆化普.综合交通枢纽布局规划模型与方法研究[J].公路交通科技.101-105.2001
- [11]李灿. 城市轨道交通枢纽乘客流交通特性分析及建模[D].北京交通大学.2008
- [12]李得伟.城市轨道交通枢纽乘客集散模型及微观仿真实验.U115; TP391.9.1-154.2007.
- [13]李伟,王伟,邓卫,吴蓉蓉.城市客运换乘枢纽,多目标灰关联综合评价研究.交通运输工程与信息学报.2.4.1-6.2004.
- [14]刘小明. 城市客运枢纽综合评价指标体系研究.中国公路学报.8(1): 97-102.1995
- [15]刘三明. 多目标规划的若干理论和方法.大连: 大连理工大学 1-113.2006.
- [16]孙晓辉,丁晓红. 结构多目标拓扑优化设计. 机械设计与研究.1-428.4.2012 .
- [17]王家翀,许川,姚栋.蒙特卡罗算法并行计算研究.核动力工程 28.4.20-24. 2007.

附录

表 2-基于权重因子 $k_1 = 0.54$, $k_2 = 0.46$ 时的一组较优解集

序号	P	W	S
01	806.21	3420	1.211456297
02	919.18	3320	1.300143349
03	804.43	3420	1.209838384
04	477.08	3220	0.884305075
05	477.64	3260	0.890412442
06	467.55	3320	0.889638777
07	805.05	3240	1.185209307
08	472.52	3260	0.885758669
09	468.14	3320	0.890175052
10	477.35	3220	0.884550489
11	476.90	3220	0.884141466
12	477.13	3220	0.884350522

表 3-基于权重因子 $k_1 = 0.81$, $k_2 = 0.19$ 时的一组较优解集

序号	P	W	S
01	806.21	3420	1.296903388
02	919.18	3320	1.445146999
03	804.43	3420	1.294476517
04	477.08	3220	0.836602066
05	477.64	3260	0.839677948
06	467.55	3320	0.829389689
07	805.05	3240	1.284916158
08	472.52	3260	0.832697284
09	468.14	3320	0.830194102
10	477.35	3220	0.836970187
11	476.90	3220	0.836356652
12	477.13	3220	0.836670236

表 4-各交通功能区场站长度 α 与 i, j 对应关系表

α_i 或 α_j	步行广场	高铁场站	公交场站	出租车场站	轻轨场站
i 或 j 取值	1	2	3	4	5
α (长度)	80	100	80	50	100

表 5-各交通功能区场站宽度 β 与 i, j 对应关系表

β_i 或 β_j	步行广场	高铁场站	公交场站	出租车场站	轻轨场站
i 或 j 取值	1	2	3	4	5
β (宽度)	50	50	50	50	50

表 6-各交通方式换乘量 U^{ij} 权重值

换乘量 U^{ij} 权重值	步行 $i=1$	高铁 $i=2$	公交 $i=3$	出租 $i=4$	轻轨 $i=5$
步行 $j=1$	0	0.0652	0.0543	0.0217	0.1630
高铁 $j=2$	0.0652	0	0.1413	0.1087	0.3261
公交 $j=3$	0.0543	0.1413	0	0.0109	0.0870
出租 $j=4$	0.0217	0.1087	0.0109	0	0.0217
轻轨 $j=5$	0.1630	0.3261	0.0870	0.0217	0